Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Seleção de Doutorado: Análise no $\mathbb{R}^n$

Data: 18 de julho de 2023 **Horário**: 09h às 12h

Inscrição: ______________________________

1. Defina distância entre um ponto e um conjunto no espaço Euclidiano. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Mostre que exite $y_0 \in F$ tal que a distância entre x e F é dada por $d(x, F) = \|x - y_0\|$.

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: Topologia do espaço Euclidiano.

   Solução: A distância entre um ponto e um conjunto é dada por

   $$d(x, F) = \inf\{\|x - y\|; y \in F\}.$$

   Seja $\{y_n\}_n \subset F$ uma sequência de pontos tal que

   $$\lim \|x - y_n\| = \inf\{\|x - y\|; y \in F\} = d(x, F).$$

   Em particular, $\{y_n\}_n$ é uma sequência limitada. De fato, para n suficientemente grande,

   $$\|y_n\| = \|y_n - x + x\| \leq \|y_n - x\| + \|x\| \leq d(x, F) + 1 + \|x\|.$$

   Como F é um conjunto fechado e a sequência $\{y_n\}_n$ é limitada, temos que $\{y_n\}_n$ possui uma subsequência convergente $\{y_{n_k}\}_k$ que converge para um ponto de F. Ou seja, existe $y_0 \in F$ tal que $\lim_k y_{n_k} = y_0$. Pela continuidade da função norma, temos que

   $$\lim \|x - y_{n_k}\| = \|x - y_0\|.$$

   Daí segue o resultado.

2. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é *localmente constante* se para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existem $c \in \mathbb{R}^m$ e um aberto U contendo x tal que $f(y) = c$ para todo $y \in U$. Mostre que se f é contínua e localmente constante então f é constante. **Dica:** Fixado $a \in \mathbb{R}^n$ mostre que $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(a)\}$ é aberto e fechado.

   Pontuação: 1,25.

Assunto: Topologia do Espaço Euclidiano Rn

Solução: Como f é contínua e $\mathbb{R}^m \setminus \{f(a)\}$ é aberto temos que $\mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(a)\} = f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{f(a)\})$ é aberto. Consequentemente A é fechado. Por outro lado, dado $x_0 \in A$ temos que $f(x_0) = f(a)$. E, como f é localmente constante temos que existe $r > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, $\forall x \in B(x_0, r)$. Em particular $c = f(x_0) = f(a)$. Assim, $B(x_0, r) \subset A$. Concluindo que A é aberto. Como $\mathbb{R}^n$ é conexo, $A \neq \emptyset$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e fechado concluímos que $A = \mathbb{R}$.

3. Sejam $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1. Mostre que

$$\int_a^b \langle \phi(t), \psi'(t) \rangle dt = \langle \phi(t), \psi(t) \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle \phi'(t), \psi(t) \rangle dt.$$

Assunto: Cálculo com integrais

Solução: Como $\langle \phi(t), \psi(t) \rangle' = \langle \phi'(t), \psi(t) \rangle + \langle \phi(t), \psi'(t) \rangle$, temos

$$\int_a^b \langle \phi(t), \psi(t) \rangle' dt = \int_a^b \langle \phi'(t), \psi(t) \rangle dt + \int_a^b \langle \phi(t), \psi'(t) \rangle dt.$$

Por outro lado, pelo teorema fundamental do cálculo que

$$\int_a^b \langle \phi(t), \psi(t) \rangle' dt = \langle \phi(t), \psi(t) \rangle \Big|_a^b,$$

o resultado segue.

4. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 tais que $\|f'(t)\| \leq \phi'(t)$ para todo $t \in (a, b)$. Mostre que $\|f(b) - f(a)\| \leq \phi(b) - \phi(a)$.

Pontuação: 1,25.

Assunto: A integral de caminhos.

Solução: Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq \int_a^b \phi'(t) dt = \phi(b) - \phi(a).$$

5. Seja $g : [1, e] \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(t) = (t^2, 2t, \ln t))$. Calcule o comprimento da imagem de g.

Pontuação: 1,25.

Assunto: A integral de caminhos.

Solução:

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^e \sqrt{4t^2 + 4 + \frac{1}{t^2}} dt \\
&= \int_1^e \frac{2\sqrt{t^4 + t^2 + 1/4}}{t} dt \\
&= \int_1^e \frac{2\sqrt{(t^2 + 1/2)^2}}{t} dt \\
&= \int_1^e \frac{2t^2 + 1}{t} dt = \int_1^e (2t + \frac{1}{t}) dt \\
&= e^2
\end{aligned}$$

6. Considere um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$. Dado $a \in U$ tal que f é diferenciável em a e que $f'(a)$ é injetora mostre que existe uma vizinhança aberta V de a tal que $f(x) \neq f(a)$, para cada $x \in V \setminus \{a\}$. **Dica:** Mostre que existe $C > 0$ tal que $\|f'(a) \cdot h\| > C$, para cada $h \in S^{m-1}$. Depois, use a fórmula de Taylor para mostrar que existe $R > 0$ tal que $\|f(a+h) - f(a)\| > 0$, quando $0 < \|h\| < R$.

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: A Fórmula de Taylor para funções entre abertos do espaço Euclidiano.

   Solução: Como $f'(a)$ é injetora temos que $\|f'(a) \cdot h\| > 0$, pra todo $h \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Ademais, como $h \mapsto \|f'(a) \cdot h\|$ é contínua e S^{m-1} é compacto temos que existe $h_0 \in S^{m-1}$ tal que $\|f'(a)h\| \geq \|f'(a) \cdot h_0\| \doteq C > 0$, para todo $h \in S^{m-1}$.

   Por outro lado, defina $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$, quando $a + h \in U$. Segue da fórmula de Taylor que $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. Assim, existe $R > 0$ tal que $\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{C}{2}$, quando $\|h\| < R$. Logo, dado $h \in B(0, R) \setminus \{0\}$ temos

   $$\|f(a+h) - f(a)\| = \|f'(a) \cdot h + r(h)\| \geq \|h\| \left(\left\| f'(a) \cdot \frac{h}{\|h\|} \right\| - \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \right) \geq \|h\|(C - \tfrac{C}{2}) > 0$$

   Deste modo, $f(x) = f(a + x - a) \neq f(a)$ quando $x \in B(a, R) \setminus \{a\}$.

7. Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ restrita ao círculo definido pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

   Pontuação: 1,25.

   Assunto: Multiplicadores de Lagrange.

   Solução Defina $g(x, y) = x^2 + y^2$. Usando multiplicadores de Lagrange, queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de modo que

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), \quad g(x, y) = 1.$$

Isto é, $2x = 2x\lambda$, $4y = 2y\lambda$ e $x^2 + y^2 = 1$. Note que $x \neq 0$ ou $x = 0$. Se $x \neq 0$ temos $\lambda = 1$, $y = 0$ e consequentemente $x \in \{-1, 1\}$. E, se $x = 0$ então $y = 1$ ou $y = -1$ (implicando $\lambda = 2$). Por outro lado,

$$f(0,1) = 2, \quad f(0,-1) = 2 \quad f(1,0) = 1, \quad f(-1,0) = 1.$$

Portanto o valor máximo procurado é 2 e o valor mínimo procurado é 1.

8. Sejam $a < b$, $c < d$ e $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o gráfico de f é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^3$.

Pontuação: 1,25.

Assunto: Integrais múltiplas.

Solução Como f é contínua e $[a,b] \times [c,d]$ é compacto temos que f é uniformemente contínua. Logo, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{(b-a)(d-c)}$, quando $x, y \in [a,b] \times [c,d]$ e $\|x - y\| < 2\delta$. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $h = \frac{b-a}{n} < \delta$ e $k = \frac{d-c}{m} < \delta$. Defina $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h, \ldots, x_m = b$ e $y_0 = c$, $y_1 = y_0 + k, \ldots, y_n = d$. Fixado $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ denote $A_{(i,j)} = [x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}]$, $m_{(i,j)} = \inf\limits_{(x,y) \in A_{(i,j)}} f(x,y)$ e $M_{(i,j)} = \sup\limits_{(x,y) \in A_{(i,j)}} f(x,y)$. Note que existem $u_{(i,j)}, U_{(i,j)} \in A_{(i,j)}$ tais que $f(u_{(i,j)}) = m_{(i,j)}$ e $f(U_{(i,j)}) = m_{(i,j)}$. Ademais $\|U_{(i,j)} - u_{(i,j)}\| \leq h + k < 2\delta$. Assim,

$$\left\{[x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}] \times [m_{(i,j)}, M_{(i,j)}]\right\}_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}}$$

é cobertura do gráfico de f e

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}\left([x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}] \times [m_{(i,j)}, M_{(i,j)}]\right) < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} hk \frac{\epsilon}{(b-a)(d-c)} = \epsilon,$$

concluindo a solução.